

ZHODNOCENÍ ÚSPĚŠNOSTI KVADRATICKÝCH SPLAJNŮ PŘI MODELOVÁNÍ MĚR PLODNOSTI V ČESKÉ REPUBLICĚ

EX-POST EVALUATION OF FERTILITY FORECASTS BY THE QUADRATIC SPLINE MODEL IN THE CZECH REPUBLIC

Filip Hon

Abstract

The contribution is devoted to the modelling of fertility in the Czech Republic by means of quadratic splines. Ex-post projections are made in several scenarios that differ according to the length of the analysed time series and according to the definition of the simulation period. The estimates are elementary compared with the projections of the Czech Statistical Office through the indicator of total fertility. In addition, fertility indicators age-specific fertility rates, average age of mothers, modal age of fertility and value of fertility at this age are used to compare modelled and observed values. The MAE and RMSE loss functions are also used.

The success of the model in estimating the given characteristics differs significantly according to the specific scenario. However, at the cost of a certain simplification, it can be stated that when the model is based on a time series from 1950, it tends to make more cautious and, as a result, often more accurate estimates in the case of the Czech Republic.

Key words: age-specific fertility rates, ex-post forecasts, quadratic spline

JEL Code: J11, J13

Úvod

Příspěvek se věnuje modelování plodnosti v České republice prostřednictvím kvadratických splajnů. V posledních desetiletích byla věnována značná pozornost modelování plodnosti pomocí statistických metod ve světové publikační praxi (Booth, 2006), v České republice je však téma poměrně výrazně publikačně nedocenené. Lze se setkat s ojedinělými příspěvky věnujícími se modelování plodnosti individuálních časových řad nebo prostřednictvím redukce dimenzí (viz Šimpach, 2015; Zeman, 2019), hodnocení úspěšnosti jednotlivých přístupů je

následně publikačně poměrně nedocenené celosvětově (Shang a Booth, 2020). Cílem příspěvku je pomoci k alespoň částečnému docenění tématu v České republice z hlediska modelu kvadratických splajnů, cíle příspěvek dosahuje prostřednictvím evaluace schopnosti modelu odhadovat nedávnou úroveň plodnosti v České republice.

Projekce ex-post jsou vyhotoveny v několika scénářích lišících se dle délky analyzované časové řady a dle definování simulačního období. Odhady zde provedené jsou elementárně srovnány s projekcemi Českého statistického úřadu prostřednictvím ukazatele úhrnné plodnosti. Na základě let konání projekcí Českého statistického úřadu bylo také definováno simulační období. Byly zvoleny dvě délky analyzované časové řady, nekrácená časová řada obsahující celou datovou základnu od roku 1950 a dále krácená od roku 1989, která obsahuje pouze období výrazných změn v úrovni plodnosti v České republice (např. Sobotka a kol., 2008; Fiala a kol., 2018)

Dále jsou v příspěvku pro srovnání modelovaných a reálně nakonec dosažených hodnot využity míry plodnosti dle jednotek věku, průměrný věk matek, modální věk plodnosti a hodnota plodnosti v tomto věku. Kromě těchto syntetických ukazatelů plodnosti jsou využity také ztrátové funkce RMSE a MAE.

V první části příspěvku je velice stručně představen kvadratický splajnový model a metodologie výpočtu. Ve druhé stěžejní části příspěvku jsou již zobrazeny výsledky samotné analýzy.

1 Stručné představení kvadratického splajnového modelu

Model vychází z myšlenky, že pokud je definována pozice několika uzlových bodů, lze křivku měř plodnosti dle věku zachytit jednoduše prostřednictvím několika parametrů. Mezi ně patří parametr úrovně R , který charakterizuje velikost míry plodnosti v modálním věku P . Parametr P tedy určuje tvar křivky, s čímž mu pomáhají ještě parametry a jako nejnižší věk, ve kterém není míra plodnosti podle věku nulová a H , což je věk, kdy hodnota míry plodnosti klesne na polovinu po dosažení maxima, na základě těchto parametrů lze určit rovnici modelu.

$$f(x) = R \cdot \Phi(x) \quad (1)$$

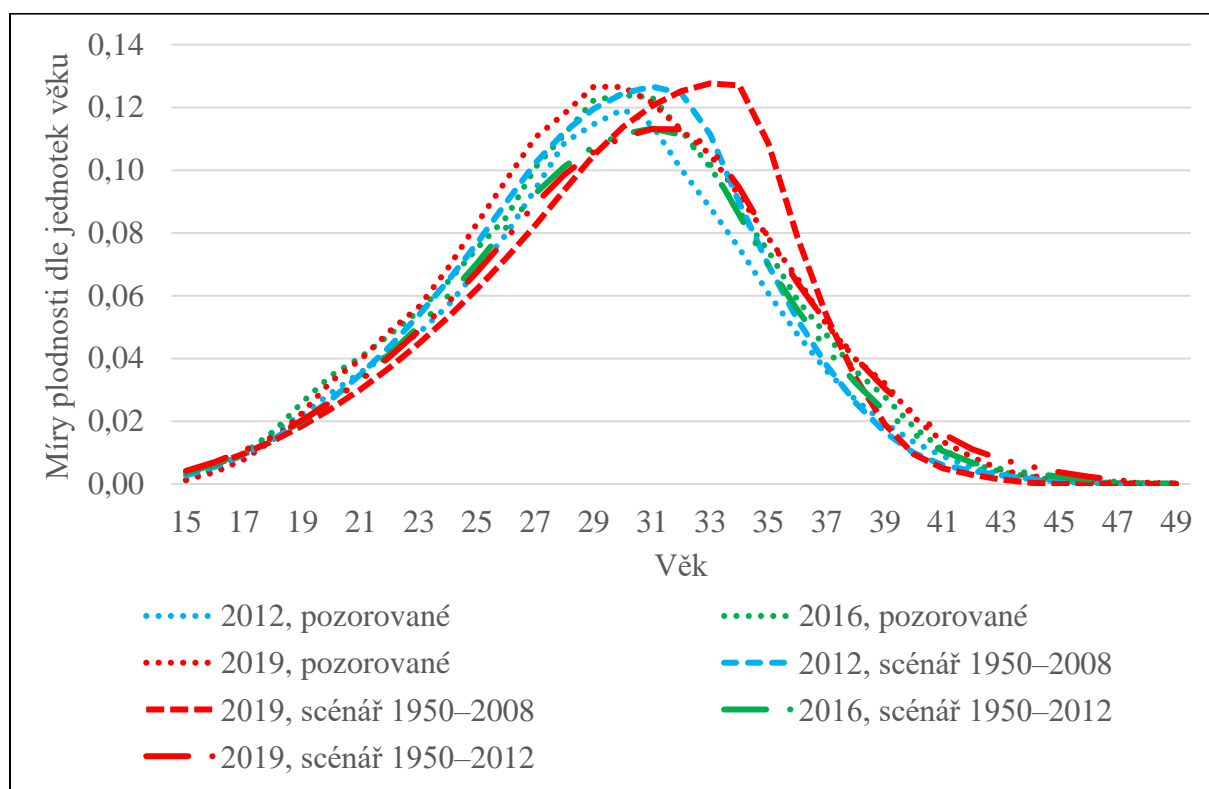
Ve vzorci $f(x)$ označuje míry plodnosti dle věku x , R je výše definovaným parametrem úrovně a $\Phi(x)$ označuje funkci definující tvar křivky. K projekci modelem pak stačí pouze předpovědět časovou řadu parametrů, proces lze snadno automatizovat například pomocí modelů ARIMA s využitím korigovaného Akaikeho kritéria (např. Burnham a Anderson, 2002).

Pro podrobnější metodologický popis přístupu je vhodné nastudovat tematickou literaturu (např. Schmertmann, 2003; Hon a Langhamrová, 2020). Human Fertility Database byla využita jako zdroj dat (Human Fertility Database, 2022).

2 Ex-post evaluace úspěšnosti modelu

V dalších výstupech a odstavcích, je tedy možné přejít na zobrazení výsledků odhadu úrovně modelu pomocí kvadratických splajnů. Komparace je provedena pomocí ukazatelů, které byly již uvedeny v úvodu. Míry plodnosti dle jednotek věku je lepší zobrazit prostřednictvím grafů 1 a 2, ostatní charakteristiky je možné přehledně prezentovat v tabulkách 1 až 5.

Obr. 1: Ex-post předpovědi měr plodnosti, nekrácená časová řada



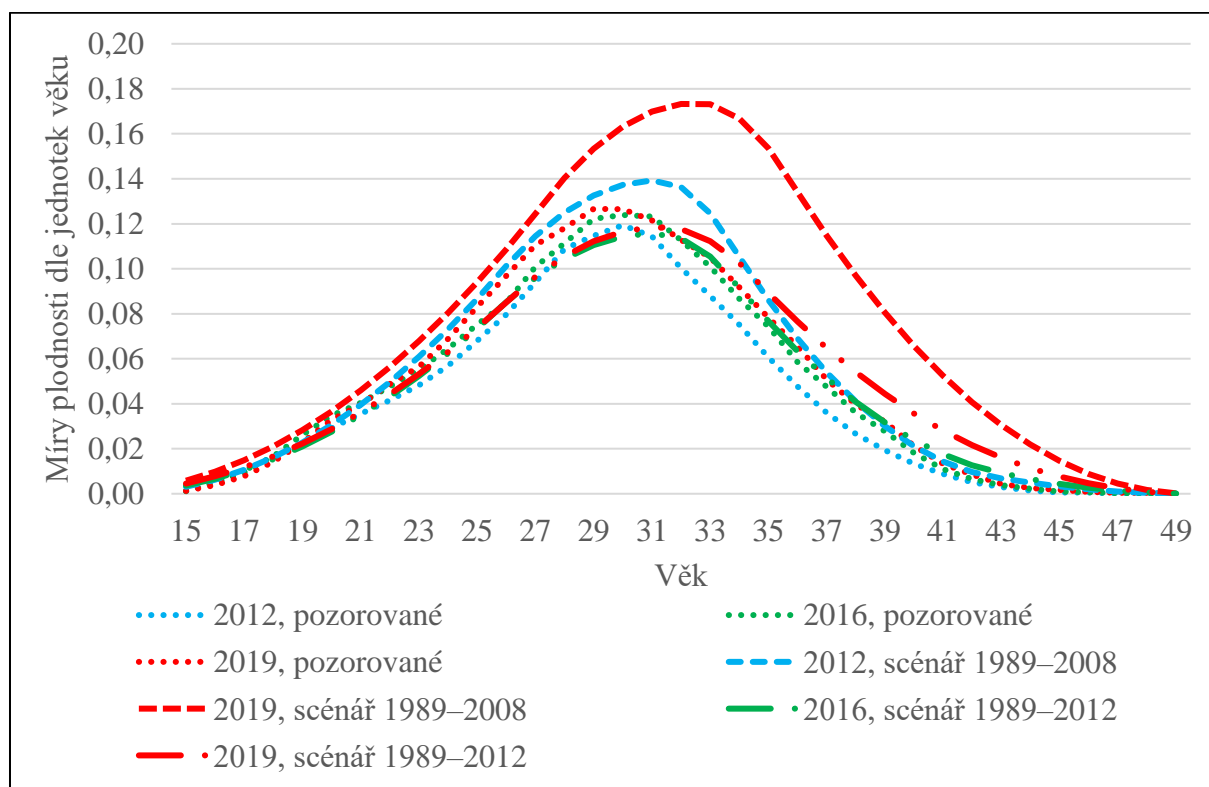
Zdroj: HFD, vlastní zpracování

Jak ukazuje obrázek 1, při modelování časové řady modelem od roku 1950 do roku 2008 je vidět sklon k zešíkmení rozdělení měr plodnosti. Modálních hodnot by míry dle modelu v roce 2019 dosahovaly kolem 33 let věku žen s tím, že ve věcích vyšších by míry plodnosti rychle klesaly. Oproti pozorovaným hodnotám dochází k podcenění úrovně plodnosti dokonce i před dosažením čtyřiceti let věku. Soustavně by následně model podhodnocoval hodnoty žen starších čtyřiceti let. Jinak lze u tohoto scénáře obecně shrnout, že zatímco se výrazně odchyluje

od reality z hlediska časování plodnosti, v její celkové intenzitě se příliš nemýlí a lze tedy předběžně očekávat celkem reálný odhad některých syntetických ukazatelů plodnosti.

Jinak je to u scénáře, který modeluje období až do roku 2012 a který lze vidět na stejném obrázku. Scénář evidentně celkovou úroveň plodnosti pro rok 2019 výrazně podceňuje a to konkrétně u žen kolem 30 let věku a mladších. Naopak téměř dokonale odhaduje míry plodnosti u žen od 32 let věku. Maximálně u žen starších lehce nadhodnocuje plodnost po čtyřicítce.

Obr. 2: Ex-post předpovědi měr plodnosti, krácená časová řada



Zdroj: HFD, vlastní zpracování

Obrázek 2 ukazuje situaci, kdy je do modelu zahrnuta pro potřeby analýzy pouze krácená časová řada od roku 1989. V tomto případě se ukazuje model jako zcela nevhodný při odhadu období od roku 2009, míry plodnosti začne okamžitě výrazně nadhodnocovat. Při zohlednění čtyřletého horizontu projekce se model alespoň přibližuje realitě ve věcích na okraji reprodukčního období ženy. Naopak v roce 2019 by již odhad měr plodnosti byl výrazně nadhodnocen i u žen čtyřicetiletých a starších a obecně se jeví hodnoty plodnosti na demograficky vyspělé zemi spíše nereálné. O něco lepší je to z hlediska odhadu časování plodnosti, kde je model podstatně opatrnější.

V případě kdy je modelována časová řada až do roku 2012, jsou výsledky v mnoha ohledech demograficky reálnější. Opět ve čtyřletém horizontu projekce scénář poměrně dobře odhaduje hodnoty měr plodnosti u žen kolem 35 let a starších. Toto již neplatí v modelovaném roce 2019, kde je míra rekuperace značně nadhodnocena. Z hlediska celkové intenzity plodnosti je model spíše pesimistický a s výjimkou právě popsané rekuperace v roce 2019 odhaduje spíše nižší hodnoty. Z hlediska časování plodnosti nepředpokládá výraznějších změn z hlediska modálních věků, jak bude podrobněji vidět v dalších výstupech.

Tab. 1: Úhrnná plodnost, ex-post předpovědi v letech projekcí ČSÚ

Rok	Projekce ČSÚ 2009	Scénář				Projekce ČSÚ 2013	Pozorované údaje
		1950–2008	1989–2008	1950–2012	1989–2012		
2009	1,50	1,55	1,58	—	—	—	1,51
2010	1,50	1,58	1,66	—	—	—	1,52
2011	1,51	1,58	1,75	—	—	—	1,43
2012	1,52	1,58	1,86	—	—	—	1,45
2013	1,53	1,57	1,97	1,47	1,48	1,45	1,46
2014	1,54	1,56	2,08	1,48	1,53	1,45	1,53
2015	1,55	1,55	2,19	1,50	1,58	1,45	1,57
2016	1,56	1,56	2,29	1,51	1,63	1,45	1,63
2017	1,57	1,56	2,41	1,53	1,68	1,46	1,69
2018	1,58	1,57	2,53	1,56	1,74	1,46	1,71
2019	1,59	1,58	2,65	1,58	1,79	1,46	1,71

Zdroj: HFD, vlastní zpracování

Z tabulky 1, která se věnuje úhrnné plodnosti, lze také vyčíst několik zajímavých faktů. Co se týká scénáře při modelování do roku 2008, je vidět, že podstatně přesněji odhaduje úhrnnou plodnost scénář s nezkrácenou datovou základnou. Při modelování pouze období od roku 1989, by například pro rok 2019 byly v rámci odhadu stanoveny demograficky výrazně nereálné hodnoty přibližující se hranici tři dětí na ženu.

Jiná situace je u projekcí ex-post začínajících v roce 2013. Zde je scénář se zkrácenou datovou základnou blíže reálným pozorovaným hodnotám. Velice přesně by scénář odhadl hodnoty do roku 2017. Hodnoty aktuální by již odhadoval příliš optimistické, protože zvyšování úhrnné plodnosti v posledních letech zpomalilo. Scénář modelování od roku 1950 je v tomto případě příliš opatrný a odhaduje, oproti realitě, pomalejší zvyšování úhrnné plodnosti.

Celkem opatrné byly i scénáře publikované v projekcích ČSÚ. Zejména pak scénář zahrnutý v projekci ČSÚ 2013, kde byla stanovena téměř konstantní úhrnná plodnost,

předpoklad se však nenaplnil a scénář je ve výsledku za rok 2019 nejvzdálenější od reality ze všech scénářů.

Tab. 2: Ztrátové funkce, ex-post předpovědi v letech projekcí ČSÚ

Rok	MAE				RMSE			
	Scénář							
	1950–2008	1989–2008	1950–2012	1989–2012	1950–2008	1989–2008	1950–2012	1989–2012
2009	0,0030	0,0032	—	—	0,0041	0,0047	—	—
2010	0,0032	0,0046	—	—	0,0048	0,0069	—	—
2011	0,0052	0,0094	—	—	0,0078	0,0130	—	—
2012	0,0048	0,0117	—	—	0,0077	0,0158	—	—
2013	0,0051	0,0146	0,0023	0,0023	0,0082	0,0195	0,0032	0,0032
2014	0,0045	0,0158	0,0028	0,0028	0,0073	0,0207	0,0042	0,0039
2015	0,0055	0,0176	0,0030	0,0030	0,0082	0,0234	0,0043	0,0039
2016	0,0070	0,0191	0,0040	0,0040	0,0093	0,0257	0,0054	0,0048
2017	0,0086	0,0207	0,0052	0,0057	0,0113	0,0283	0,0072	0,0066
2018	0,0096	0,0235	0,0056	0,0066	0,0128	0,0318	0,0079	0,0077
2019	0,0106	0,0270	0,0057	0,0077	0,0144	0,0362	0,0086	0,0091

Zdroj: HFD, vlastní zpracování.

Tab. 3: Průměrný věk matek, ex-post předpovědi v letech projekcí ČSÚ

Rok	Scénář				Pozorované údaje
	1950–2008	1989–2008	1950–2012	1989–2012	
2009	29,47	29,49	—	—	29,41
2010	29,61	29,71	—	—	29,57
2011	29,72	29,97	—	—	29,69
2012	29,81	30,27	—	—	29,76
2013	29,89	30,56	29,83	29,88	29,86
2014	29,97	30,84	29,91	30,06	29,94
2015	30,08	31,08	30,00	30,28	29,99
2016	30,17	31,30	30,12	30,50	29,99
2017	30,29	31,50	30,26	30,71	30,02
2018	30,42	31,68	30,41	30,90	30,11
2019	30,55	31,85	30,56	31,07	30,16

Zdroj: HFD, vlastní zpracování

Tabulka 2 ukazuje srovnání úspěšnosti modelu prostřednictvím ztrátových funkcí. Lze komentovat, že menších chyb se ve většině srovnávaných let dopouští scénáře, kde je modelována celá datová základna od roku 1950. Pouze v případě zvažování čtyřletého horizontu projekce začínající v roce 2013, lze scénáře z hlediska MAE na deseti tisíce označit za ekvivalentní, z hlediska RMSE by se zde menší chyby odhadu dokonce až do roku 2018

dopouštěl scénář modelování krácené datové řady. Dále lze i u tohoto modelu konstatovat, že projekce začínající v roce 2009 je při srovnání stejných horizontů ve většině případů méně přesná než druhá varianta, kde odhad začíná až v roce 2013.

Největších rozdílů mezi ukazateli MAE a RMSE dosahuje scénář modelování let od roku 1989, do roku 2008. Pokud je však časová řada tohoto scénáře prodloužena až do roku 2012, rozdíly již nejsou tak výrazné.

Z hlediska průměrného věku, uvedeného v tabulce 3, je podstatně přesnější scénář modelování celé datové základy. Uvedená skutečnost platí bez ohledu na to, zda simulační období začalo v roce 2009, nebo 2013. Vzhledem k výraznému růstu průměrného věku matek v nedávné minulosti je však naprosto všemi scénáři hodnota tohoto ukazatele za rok 2019 nadhodnocená. Nejhorší si z hlediska roku 2019 vede scénář, ve kterém je modelováno období 1989 až 2008, které nadhodnocuje průměrný věk matek téměř o dva roky. Nicméně se samozřejmě jedná o jeden ze scénářů s delším horizontem projekce, při pohledu na data lze očekávat, že i scénář modelování 1989 až 2012 by se do budoucna dále od reality vzdaloval.

Mezi jednotlivými kroky projekce je vidět, že se charakteristika u všech scénářů vždy zvyšovala. Tento odhad je poměrně správný, na pozorovaných údajích je s přesností na dvě desetinná místa možné označit za konstantní pouze hodnoty v letech 2015 a 2016, jinak i v realitě stále dochází k postupnému růstu průměrného věku.

Tab. 4: Modální věk plodnosti, ex-post předpovědi v letech projekcí ČSÚ

Rok	Scénář				Pozorované údaje
	1950–2008	1989–2008	1950–2012	1989–2012	
2009	30	30	—	—	29
2010	31	30	—	—	30
2011	31	31	—	—	30
2012	31	31	—	—	30
2013	31	31	31	31	30
2014	32	32	31	31	30
2015	32	32	31	31	30
2016	32	32	31	31	30
2017	33	32	31	31	30
2018	33	32	31	31	30
2019	33	32	31	31	29

Zdroj: HFD, vlastní zpracování

Tab. 5: Hodnota plodnosti v modálním věku, ex-post předpovědi v letech projekcí ČSÚ

Rok	Scénář				Pozorované údaje
	1950–2008	1989–2008	1950–2012	1989–2012	
2009	0,123	0,124	—	—	0,125
2010	0,124	0,129	—	—	0,125
2011	0,126	0,134	—	—	0,118
2012	0,127	0,139	—	—	0,119
2013	0,127	0,144	0,113	0,113	0,117
2014	0,128	0,149	0,113	0,114	0,125
2015	0,128	0,154	0,113	0,115	0,124
2016	0,127	0,159	0,113	0,116	0,124
2017	0,128	0,164	0,113	0,117	0,128
2018	0,128	0,169	0,113	0,118	0,129
2019	0,128	0,173	0,113	0,119	0,127

Zdroj: HFD, vlastní zpracování

Syntetické ukazatele věnující se modální plodnosti předpovězené modelem v tabulkách 4 a 5, podrobně ukazují některé skutečnosti naznačené již výše u grafů měr plodnosti dle věku.

Scénáře s výchozím rokem simulačního období 2013 se neliší na základě toho, jak dlouhá datová základna je modelována a oba ponechávají konstantní hodnotu 31 let věku. Jiná je situace u projekcí začínajících v roce 2009, kde oba scénáře mají tendenci nadále odkládat modální věk plodnosti do vyššího věku. Intenzivněji se jev projevuje, pokud je modelována časová řada parametrů již od roku 1950.

Podstatně větší rozdíly mezi jednotlivými scénáři lze pozorovat u hodnoty plodnosti v modálním věku. Zde je možné za nejvíce nepřesný považovat scénář modelování let 1989 až 2008, který měl tendenci tuto hodnotu výrazně zvyšovat. Naopak scénář, kdy je modelována celá datová základna v tomto případě odhaduje hodnoty v posledních letech velice přesně, zakolísání časové řady k nižším reálným hodnotám okolo roku 2012 nicméně ignoruje.

U scénářů se simulačním obdobím začínajícím v roce 2013 se o něco přesnější jeví scénář modelování zkrácené časové řady, který správně odhaduje zvyšování hodnot, nicméně intenzita kterou tomuto zvyšování přikládá je nedostatečná. Při modelování od roku 1950 by následně model ponechal hodnotu plodnosti v modálním věku na tři desetinná místa skrz celé sledované období konstantní.

Závěr

Úspěšnost modelu při odhadu daných charakteristik se výrazně vyšší dle konkrétního scénáře. Lze však za cenu určitého zjednodušení konstatovat, že model když je založen na nekrácené časové řadě má v případě České republiky tendenci provádět opatrnější a ve výsledku často i přesnější odhady. Problematictější než odhad časování plodnosti se pro model v řadě scénářů jeví odhadnout celkovou úroveň plodnosti, scénář s největší chybou odhadu byl právě typický tím, že se mýlil v celkové úrovni plodnosti.

Případné zkreslení se jeví v řadě scénářů dobře korigovatelné úpravou konkrétního parametru a lze předpokládat, že při změně modelování časové řady parametru, jehož vývoj by se již i v době minulé musel jevit mimo reálné demografické meze, by bylo možné dosáhnout podstatně lepších výsledků z hlediska syntetických ukazatelů i ztrátových funkcí.

Poděkování

Příspěvek vznikl za podpory Grantové agentury České republiky v rámci projektu „Ekonomika úspěšného stárnutí“ GAČR 19-03984S.

Literatura

Booth, H. (2006). Demographic forecasting: 1980-2005 in review. *International Journal of Forecasting*, 22(3), 547–581.

Burnham, K., & Anderson, D. (2002). *Model Selection and Multimodel Inference: A Practical Information-Theoretic Approach*. 2. vyd. New York: Springer.

Fiala, T., Langhamrová, J., Pechholdová, M., Ďurček, P., & Šprocha, B. (2018). Population development of Czechia and Slovakia after 1989. *Demografie, revue pro výzkum populačního vývoje*, 60(3), 202–218.

Hon, F. (2022). Statistické metody modelování a odhadu budoucího vývoje plodnosti. Disertační práce. Vysoká škola ekonomická v Praze. Fakulta informatiky a statistiky. Katedra demografie.

Hon, F., & Langhamrová, J. (2020). Interpolace měř plodnosti podle věku v ČR pomocí kvadratických splinů ve vybraných letech. *Demografie, revue pro výzkum populačního vývoje*, 62(2), 71–88.

Human Fertility Database. (2022). *Czechia, age-specific data* [online]. URL: <https://www.humanfertility.org/cgi-bin/country.php?country=CZEtab=asfr>.

Shang, H. L., & Booth, H. (2020). Synergy in fertility forecasting: Improving forecast accuracy through model averaging. *Genus*, 76(27), 1–38.

Schmertmann, C. (2003). A system of model fertility schedules with graphically intuitive parameters. *Demographic Research*, 5(9), 81–110.

Sobotka, T., Šťastná, A., Zeman, K., Hamplová, D., & Kantorová, V. (2008). Czech Republic: A rapid transformation of fertility and family behaviour after the collapse of state socialism. *Demographic Research*, 10(19), 403–454.

Šimpach, O. (2015). Fertility of Czech females could be lower than expected: Trends in future development of age-specific fertility rates up to the year 2050. *Statistika*, 95(1), 19–35.

Zeman, K. (2019). Fertility assumptions in the population projection of the Czech Republic of Czech Statistical Office 2018–2100. *Demografie, revue pro výzkum populačního vývoje*, 61(4), 249–260.

Kontakt

Filip Hon

Vysoká škola ekonomická, katedra demografie

Náměstí W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3

filip.hon@vse.cz