VYUŽITIE LEE-CARTEROVHO MODELU NA PREDIKCIU NORMÁLNEJ DĹŽKY ŽIVOTA V SR A ČR

Vladimír Vlk – Karol Pastor

Abstrakt

Modus náhodnej premennej, ktorá vyjadruje dĺžku života jednotlivca, sa nazýva normálna dĺžka života. Je to vek, v ktorom ľudia najčastejšie umierajú, a odhaduje sa z úmrtnostných tabuliek. V príspevku sme skúmali vývoj normálnej dĺžky života za posledné desaťročia na Slovensku a v Českej republike. Pomocou Lee-Carterovho modelu sme potom počítali predikcie mier úmrtnosti a predikcie strednej a normálnej dĺžky života v oboch populáciách. Výsledky naznačujú, že tento vývoj napriek mnohým spoločným znakom má aj isté odlišnosti, aj čo sa týka rozdielov medzi mužmi a ženami. Kým stredná dĺžka života sa postupne predlžuje vo všetkých skúmaných súboroch, u normálnej dĺžky to platiť nemusí. Anomália, ktorá sa vyskytuje u mužov SR na konci XX. storočia, pretrváva i v prognózovanom vývoji. Ukazuje sa tiež, že výpočet normálnej dĺžky života je citlivý najmä na presnosť vstupných dát a na spôsob vyhladzovania dát na konci tabuľky (t.j. pre vysoké veky).

Kľúčové slová: dlhovekosť, normálna dĺžka života, Lee-Carterov model, Slovensko, Česká republika

USE OF LEE-CARTER MODEL TO PREDICT THE NORMAL LIFE EXPECTANCY IN SLOVAKIA AND THE CZECH REPUBLIC

Abstrakt

Mode of random variable, which indicates the length of life of an individual is called a normal life expectancy. It is the age at which people most often die, and it is estimated from life tables. In this paper, we examined the development of normal life expectancy in recent decades in Slovakia and the Czech Republic. Use the Lee-Carter model, we then calculated mortality rates and prediction of life expectancy and normal life expectancy in both populations. The results suggest that this trend despite many common features, it also has some differences, both in terms of differences between men and women. While life expectancy is gradually extending in all the surveyed sample, by the normal length is not necessarily true. Anomaly, which occurs in men in Slovakia at the end of XX. century, continued into forecasting. It also appears that the calculation of the normal life expectancy is particularly sensitive to the accuracy of input data and the method of smoothing data at the end of the table (i.e. for higher ages).

Key words: longevity, modal age at death, Lee-Carter model, Slovakia, Czech Republic
JEL Code: E27, J11, J14

Úvod. Dlhovekosť, jej meranie a vývoj

V súvislosti so zrýchleným populačným starnutím sa v poslednej dobe obracia pozornosť demografov na ukazovatele dĺžky života, najmä strednú, pravdepodobnú a normálnu dĺžku života (stredná hodnota, medián a modus dĺžky ďalšieho života novorodencov). Ako je známe, rozdelenie úmrtí podľa veku je bimodálne, značne asymetrické vďaka pomerne vysokej detskej úmrtnosti. Ešte v polovici XX. storočia aj na Slovensku globálne maximum tvorili úmrtia vo veku 0. Preto predmetom štúdia bude modálny vek pri úmrtí dospelých osôb, t.j. vek, v ktorom umiera najviac ľudí (z tých, ktorí prežili nebezpečný detský vek). Normálna dĺžka života sa tak dá interpretovať ako vek, v ktorom obvykle prichádza prirodzená smrť.

Znižovanie úmrtnosti a predlžovanie ľudského života je dnes už viac-menej všeobecný jav. Má tri hlavné zložky: znižovanie detskej a dojčenskej úmrtnosti, znižovanie predčasnej úmrtnosti (na tzv. odvrátiteľné príčiny, *rektangularizácia krivky* prežívania) a (prípadne) posúvanie normálnej dĺžky života do vyššieho veku (*shifting hypothesis*). Naše výpočty prekvapivo ukázali, že vývoj normálnej (modálnej) dĺžky života na Slovensku a v ČR má odlišný priebeh, zvlášť u mužov, a tak tomu bude i v blízkej budúcnosti.

1 Rozdelenie úmrtí podľa veku

Označme x ($x \geq 0$) (presný) vek osoby, a $l(x)$ počet osôb z tabuľkovej populácie, ktoré sa dožívajú presného veku x rokov. Ak pre jednoduchosť zvolíme $l(0) = l_0 = 1$, potom $l(x)$ sa zároveň rovná pravdepodobnosti, že práve narodená osoba sa dožije x rokov. *Intenzita úmrtnosti* (t.j. okamžitý relatívny úbytok počtu osôb v populácii) je potom definovaná vzťahom

$$\mu(x) = -\frac{1}{l(x)}\frac{d\,l(x)}{dx}. \qquad (1)$$

Ako je známe, počet dožívajúcich sa veku x možno potom vyjadriť pomocou integrálu

$$l(x) = l_0\, e^{-\int_0^x \mu(z)\,dz}. \qquad (2)$$

Rozdelenie úmrtnosti podľa veku popisuje funkcia $d(x) = \mu(x)\ l(x)$, čo je zároveň hustota pravdepodobnosti náhodnej premennej, že osoba zomrie vo veku presne x rokov. Jej diskrétna analógia d_x vyjadruje počet zomrelých v dovŕšenom veku x rokov. Normálna dĺžka života M je bod maxima (modus) funkcie $d(x)$ pre $x > 0$ a je to zároveň jeden z inflexných bodov funkcie $l(x)$. Derivovaním $d(x)$ podľa x sa dá ukázať (napr. Canudas-Romo 2008), že M je riešením rovnice

$$\frac{d\,\mu(x)}{dx} = \mu\,'(x) = [\mu(x)]^2\,. \qquad (3)$$

Dá sa je ukázať (Canudas-Romo 2008, Horiuchi et al. 2013), že napr. v Gompertzovom modeli s intenzitou úmrtnosti v tvare

$$\mu(x) = B\,C^x = B\,e^{cx} = e^{b+cx} \qquad (4)$$

(kde $b = \ln B$, $c = \ln C$) je

$$M = \ln(c/B)\,/\,c\,, \quad \mu(M) = c\,, \quad l(M) = l_0\,e^{-1+B/c}, \quad d(M) = l_0\,c\,e^{-1+B/c}. \qquad (5)$$

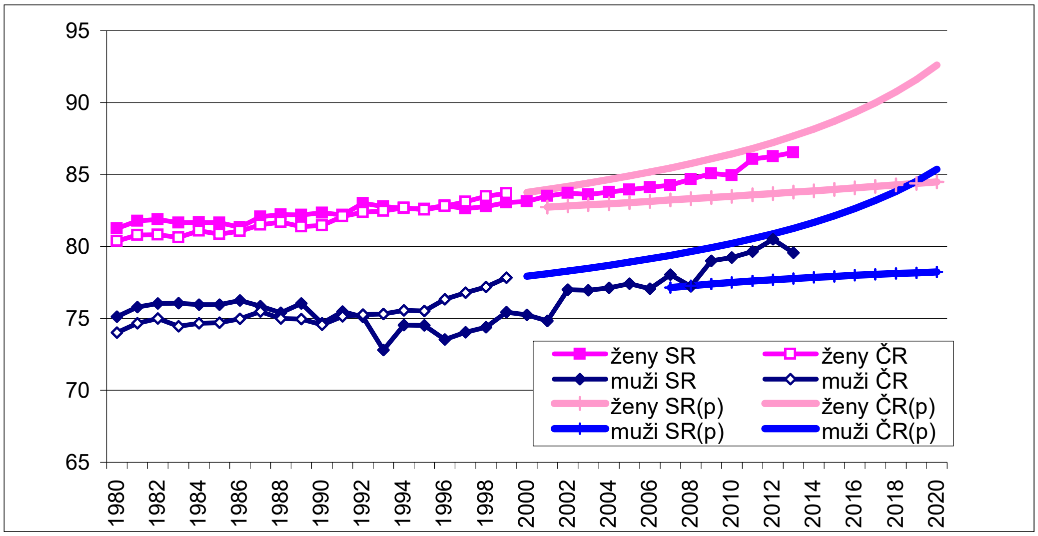
2 Odhad normálnej dĺžky života z pozorovaných údajov

V praxi máme väčšinou k dispozícii dáta o zomrelých a žijúcich v dovŕšenom veku za kalendárny rok. Normálna dĺžka života sa potom počíta ako odhad modusu z úmrtnostných tabuliek. Presnosť takéhoto odhadu závisí od mnohých faktorov, ako napr.:

- kvalita (presnosť a spoľahlivosť) vstupných dát;
- metóda konštrukcie úmrtnostných tabuliek, vyhladzovanie dát v strednej časti tabuľky, aproximácia a extrapolácia pravdepodobnosti úmrtia vo vysokých vekoch;
- výber modelu pre intenzitu úmrtnosti, výber metódy odhadu jeho parametrov (obvykle Kingova – Hardyho metóda),
- spôsob prepojenia vyhladených dát v strednom a vyššom veku (obvykle práve v okolí normálnej dĺžky života);
- metóda aproximácie modusu (vrchol paraboly preloženej tromi bodmi, alebo získanej pomocou MNŠ z viacerých dát (nie je jedno, ktorých), P-splajny (Horiuchi et al. 2013)).

Preto výsledné odhady modusu (z tých istých dát) sa môžu nezanedbateľne líšiť, najmä v populáciách s „nedokončenou rektangularizáciou“, t.j. ak vrchol krivky $d(x)$ je pomerne plochý.

Obr. 1. Normálna dĺžka života mužov a žien v SR a ČR, odhady a prognózy (p).



Na Obr.1. je znázornený vývoj normálnej dĺžky života v SR a ČR z dát, ktoré boli k dispozícii. Na výpočet sme použili dáta z českej a slovenskej stránky POPIN (POPIN Czech republic 2003, VDC 2015). Tabuľkový počet zomrelých vo veku 70-85 rokov (muži), resp. 75-90 rokov (ženy) bol preložený parabolou 2. stupňa pomocou MNŠ a vypočítaný jej vrchol. Pozoruhodné je, že pre mužov i pre ženy bola normálna dĺžka života mierne vyššia v SR ako v ČR až do začiatku 90. rokov. Potom normálna dĺžka života u slovenských mužov prekvapivo klesla, aby sa ku koncu tisícročia opäť vrátila na pôvodné hodnoty, hoci stredná dĺžka života stále významne stúpala. Podotýkame, že podobné výsledky, získané nezávisle z údajov *Human Mortality Database*, uvádza aj Langhamrová et al. (2014).

Na Obr.1 je tiež vidno, že takto vypočítaný odhad normálnej dĺžky života má u mužov rozkolísanejší priebeh ako u žien. Minimálne v prípade populácie SR je to preto, že bod prechodu medzi dátami vyhladenými metódou kĺzavých priemerov a King-Hardyho metódou (Mészáros 2000) v jednotlivých rokoch je vek okolo 77 až 80 rokov, ktorý je väčšinou nad odhadnutým modusom u mužov, ale pod odhadnutým modusom u žien.

Výpočet predikcií, ktoré sú na Obr.1 označené znakom (p), je popísaný nižšie v § 6.

3 Vývoj normálnej dĺžky života v čase

Vo všeobecnosti i pri klesajúcej úmrtnosti (resp. rastúcej strednej dĺžke života) môže normálna dĺžka života rásť, klesať (ako ukazuje vývoj pre slovenských mužov na konci XX. stor.) alebo držať sa na tej istej úrovni. Dá sa ukázať (Canudas-Romo 2008), že ak napr. v Gompertzovom modeli (4) sa intenzita úmrtnosti mení v čase rovnomerne,

$$\mu(x,\, t) = B(t)\, C^{x} = Be^{-rt}\, e^{cx} = e^{\,b\, -\, rt\, +cx}\,, \qquad (6)$$

tak modus $M(t)$ je lineárnou funkciou času,

$$M(t) = M + rt\,/c\,, \qquad (7)$$

kde $M(0) = M = \ln(c/B)\,/\,c$, pričom

$$\mu(M(t),t) = c\,, \quad l(M(t),t) = l_0\, e^{\,-1+(B/c)\exp(-rt)}\,, \quad d(M(t),t) = l_0\, c\, e^{\,-1+(B/c)\exp(-rt)}. \qquad (8)$$

Pre obvyklé hodnoty parametrov Gompertzovho modelu funkcia $d(M(t),t)$ v čase pomaly klesá k $l_0\, e^{-1}$. Takýto vývoj možno pozorovať aj napr. v krajinách s nízkou úmrtnosťou (Canudas-Romo 2008: 1182). Naproti tomu, ak sa znižuje len detská a predčasná úmrtnosť, modus sa vôbec nemusí meniť.

V ďalšej časti použijeme na prognózu úmrtnosti model, ktorý publikovali Lee a Carter (1992) a ktorý nepredpokladá rovnaké tempo znižovania špecifických mier úmrtnosti. Tu

$$\mu(x,\, t) = e^{\alpha(x)\, +\, \beta(x)\, k(t)}. \qquad (9)$$

Parameter $\alpha(x)$ vyjadruje vplyv veku, $k(t)$ vplyv času a $\beta(x)$ vyjadruje vplyv časového faktora $k(t)$ na úmrtnosť v rôznych vekoch. Ak sa napr. miery úmrtnosti v čase nemenia, $k(t) \equiv 0$ a naviac $\alpha(x) = b + c\, x = \ln B + x \ln C$, model (9) sa zmení na Gompertzov model (4). V prípade, že v (9) $k(t)$ je klesajúca lineárna funkcia (čo je častý prípad), napr. $k(t) = \lambda - t$, kde λ je vhodná konštanta, tak v (9)

$$\mu(x,\, t{+}1) = e^{\alpha(x)\, +\, \beta(x)\, k(t+1)} = e^{\alpha(x)\, +\, \beta(x)\, (\lambda\, - t - 1)} = e^{\alpha(x)\, +\, \beta(x)\, (\lambda\, - t)}\, e^{-\beta(x)} = \mu(x,\, t)\, e^{-\beta(x)}\,,$$

a $\beta(x)$ predstavuje ročnú mieru poklesu intenzity úmrtnosti vo veku x. Ak naviac $\beta(x) = r$ nezávisí od veku, tak model (9) sa zmení na Gompertzov dynamický model (6) v tvare $\mu(x,t) =$ $= e^{\,(b - r\lambda)\, -\, rt\, +cx}$.

Dodajme, že parametre $\alpha(x)$, $\beta(x)$ a $k(t)$ v (9) nie sú určené jednoznačne. Či a ako sa mení modus $M(t)$, závisí od priebehu parametra $\beta(x)$.

4 Predikcie úmrtnosti v LCM

Lee – Carterov model (LCM) opisuje zmeny špecifickej miery úmrtnosti podľa veku v závislosti od času (Lee a Carter 1992). LCM predpokladá, že vek x i čas t sa menia diskrétne a pozorovaná špecifická miera úmrtnosti $M_{x,t}$ sa dá písať v tvare

$$M_{x,t} = e^{\alpha_x + \beta_x k_t} + \tilde{\varepsilon}_{x,t}, \qquad x = x_1,\dots,x_n, \quad t = t_1,\dots,t_m, \tag{10}$$

kde α_x, β_x, k_t sú parametre modelu závislé od veku, resp. od času a $\tilde{\varepsilon}_{x,t}$ je náhodná chyba. Na výpočty je vhodnejší logaritmický tvar modelu

$$\ln(M_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x k_t + \varepsilon_{x,t}, \qquad x = x_1,\dots,x_n, \quad t = t_1,\dots,t_m. \tag{11}$$

Aby parameter bolo možné identifikovať jednoznačne, na parametre β_x a k_t sú kladené dodatočné podmienky, napr.

$$\sum_{x=x_1}^{x_n} \beta_x = 1, \qquad \sum_{t=t_1}^{t_m} k_t = 0. \tag{12}$$

Na odhad týchto parametrov existuje niekoľko metód, v tomto príspevku používame metódu publikovanú v práci Haberman a Russolillo (2005). Prvotné odhady získame z nasledujúcich vzťahov:

$$\hat{\alpha}_x = \tfrac{1}{T}\sum_{t=t_1}^{t_m} \ln(M_{x,t}), \quad \tilde{k}_t = \sum_{x=x_1}^{x_n} (\ln(M_{x,t}) - \hat{\alpha}_x), \quad \hat{\beta}_x = \frac{\sum_{t=t_1}^{t_m} \tilde{k}(\ln(M_{x,t}) - \hat{\alpha}_x)}{\sum_{t=t_1}^{t_m} \tilde{k}_t^2}. \tag{13}$$

Keďže nie je dôvod predpokladať, že priebeh funkcií $\alpha(x)$ a $\beta(x)$ má príliš veľké nepravidelnosti, môže byť užitočné získané hodnoty vhodnou metódou vyhladiť (najmä ak neboli vyhladené už vstupné dáta). Prvotné odhady k_t treba ešte prepočítať tak, aby sa počty skutočných úmrtí s očakávanými úmrtiami v jednotlivých rokoch zhodovali a platila rovnosť

$$\sum_{x=x_1}^{x_n} D_{x,t} = \sum_{x=x_1}^{x_n} P_{x,t}\, e^{\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x k_t}. \tag{14}$$

kde $D_{x,t}$ je počet zomrelých vo veku x a v čase t a $P_{x,t}$ je stredný stav počtu žijúcich vo veku x a v čase t.

Pre odhad budúcich hodnôt mier úmrtnosti treba vypočítať predikcie parametra k_t. Na to sa dá použiť tiež niekoľko metód. V tomto príspevku (podobne ako Vlk 2015) sa využívajú na predikcie ARIMA modely, ako je to pri LCM obvyklé. Môžeme ich nájsť napríklad v práci Artl a Artlová (2003).

Pre takto získané budúce hodnoty parametra k_t možno vypočítať predikcie špecifických mier úmrtnosti (cf. Haberman a Russolillo 2005) zo vzťahu

$$\hat{M}_{x,T+s} = M_{x,T}\, e^{[\hat{\beta}_x(\hat{k}_{t+s} - k_T)]}, \tag{15}$$

kde T predstavuje posledný rok, použitý pri odhade parametrov Lee-Carterovho modelu, čiže $M_{x,T}$ je posledná špecifická miera úmrtnosti použitá pri odhade parametrov v Lee-Carterovom modeli a $\hat{M}_{x,T+s}$ je už predigovaná špecifická miera úmrtnosti, pričom $s > 0$. Potom v každom roku t vypočítame predikciu pravdepodobnosti úmrtia vo veku x zo vzťahu

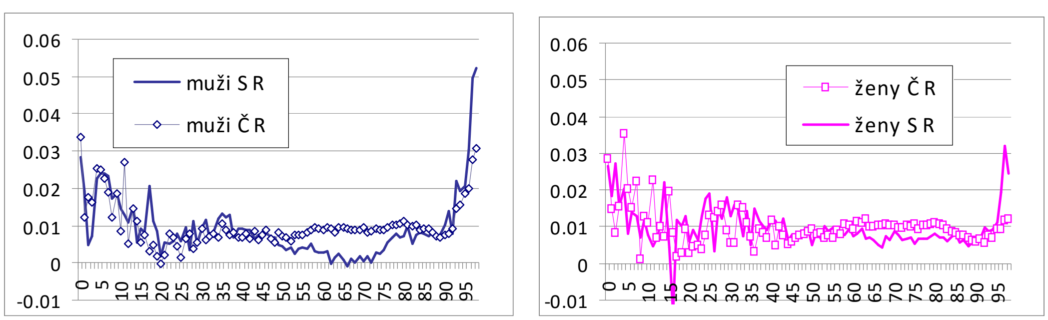
$$q_{x,t} = 1 - e^{-\hat{M}_{x,t}} \qquad (16)$$

a následne zo známych vzťahov dorátame ostatné premenné v úmrtnostných tabuľkách. Z vypočítaných hodnôt $d_{x,t}$ vypočítame odhad modusu $M(t)$.

5 Použitie LCM na dáta SR a ČR

Lee-Carterov model sme aplikovali na populáciu Slovenskej a Českej republiky, zvlášť pre mužov a pre ženy. Vstupnými údajmi boli dáta za roky 1980 až 1999 (ČR), resp. 2000 (SR), získané z internetových stránok POPIN (POPIN Czech republic 2003, VDC 2015). Z nich sme získali špecifickú mieru úmrtnosti $M_{x,t}$. Pomocou metódy podľa Habermana a Russolilla sme odhadli parametre Lee-Carterovho modelu. Na Obr. 2 sú zobrazené len odhady parametra β_x vo všetkých štyroch súboroch, keďže zmeny funkcie $d_{x,t}$ závisia od neho.

Obr. 2. Parameter β_x pre mužov a ženy v SR a ČR.



Ako vidno, v ČR vychádza β_x pre mužov i pre ženy takmer konštantné okolo 0,01 pre rôzne veky (s výnimkou veľmi nízkych a veľmi vysokých vekov), čo značí, že s časom sa úmrtnosť znižuje pomerne rovnomerne (špecifická miera úmrtnosti sa znižuje každoročne o zhruba jedno percento v každom veku). V SR je situácia iná. U mužov vo vekoch okolo 50-80 rokov sa špecifická miera úmrtnosti znižuje len veľmi pomaly (β_x je blízke nule), čo značí, že znižovanie úmrtnosti sa deje elimináciou predčasných úmrtí. U žien SR je vývoj podobný ako v ČR, znižovanie úmrtnosti je však o niečo pomalšie.

Dodajme, že tento atypický výsledok u mužov nie je celkom nový. Kodada (2007) použil LCM pri skúmaní dát za SR za iné časové obdobie, pričom hodnoty parametra β_x vyšli podobne (pre vek 60-80 rokov menej ako 0,005).

6 Predikcia vývoja normálnej dĺžky života v SR a ČR podľa LCM

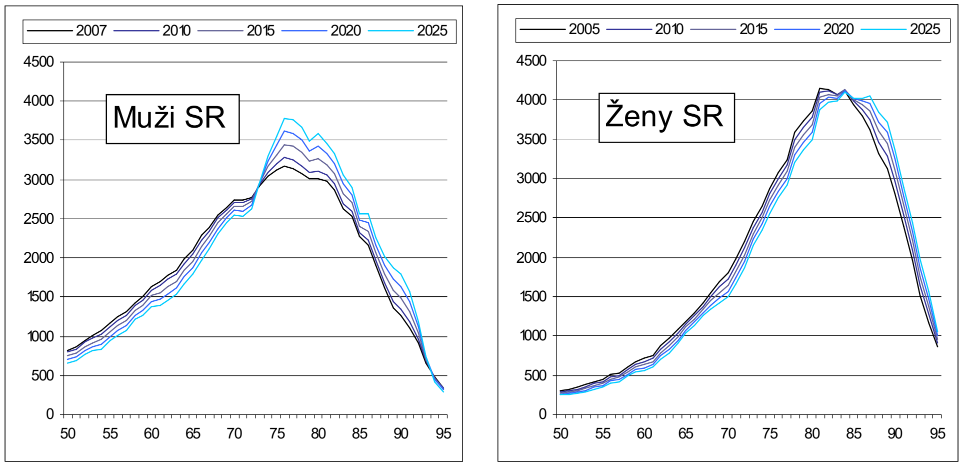
Po odhadnutí všetkých parametrov Lee-Carterovho modelu sme počítali predikcie pre časový parameter k_t z dát za 1980 až 1999 (ČR) resp. 2000 (SR). Po zvážení viacerých kritérií pre vybratie najlepšieho ARIMA modelu (Vlk 2015) sme zvolili ARIMA(0,1,2) pre ženy SR, v ostatných prípadoch ARIMA(0,1,1). Ukázalo sa však, že súbor mužov SR dáva nerealistické prognózy. Príčinu treba vidieť v tom, že úmrtnosť slovenských mužov sa po rokoch stagnácie začala od začiatku 90. rokov znižovať. Prejavilo sa to vo významnej zmene trendu parametra k_t , čo potvrdil aj test o zhode regresných priamok pred a po roku 1991. Preto sme pre zlepšenie predikcií uvažovali u mužoch SR len model s dátami od roku 1992 až 2006.

Pomocou týchto predikcií sme pre všetky štyri súbory získali predikcie špecifických mier úmrtnosti podľa vzťahu (15), potom podľa vzťahu (16) sme získali pravdepodobnosti úmrtia a následne aj ostatné premenné v úmrtnostných tabuľkách (podrobnosti Vlk 2015). Potom sme v nich sledovali vývoj funkcie $d_{x,t}$, t.j. tabuľkový počet zomrelých v danom veku a čase *t,* a rovnakým spôsobom ako v § 3 vypočítali jej modus, čiže vek, v ktorom zomiera najviac ľudí. Výsledky pre všetky štyri súbory do r. 2020 sú znázornené na Obr.1.

Dáta zo slovenskej stránky POPIN (VDC 2015) umožňujú porovnať získané predikcie normálnej dĺžky života v SR s jej odhadmi vypočítanými z publikovaných dát rovnakým spôsobom ako v § 3. Ako vidno na Obr.1, predikcie o niečo podhodnocujú reálny vývoj. Je to zrejme nielen preto, že predikcie sú počítané z pomerne krátkeho časového radu a že príslušné predikčné intervaly sú príliš široké, ale zrejme aj preto, že predikcie nedostatočne zachycujú zmenu trendu vo vývoji úmrtnosti na konci XX. storočia, čo platí najmä pre mužov SR.

Výhradu možno mať aj voči zvolenej metóde pre odhad modusu, ktorá zlyháva pre vzdialené predpovede. Na druhej strane, malý počet bodov funkcie d_x použitých na odhad modusu môže viesť k skokom vo vývoji odhadov normálnej dĺžky života. Je to spôsobené tým, že krivka d_x má pomerne ploché a asymetrické maximum s viacerými náhodnými výkyvmi. Situáciu ilustruje Obr.3, ktorý znázorňuje vývoj $d_{x,t}$ v čase vo vybraných rokoch pre súbor mužov a žien SR. Pre nedostatok miesta grafy pre ČR neuvádzame, vyzerajú podobne, avšak vrchol krivky sa presúva doprava o niečo rýchlejšie.

Obr. 3. Priebeh funkcie $d_{x,t}$, predikcie vo vybraných rokoch, muži a ženy SR.



Vývoj normálnej dĺžky života, ale aj celej funkcie d_x je ovplyvňovaný parametrom β_x. Pretože práve parameter β_x je u slovenských mužov v okolí modálneho veku blízky nule, normálna dĺžka života sa u slovenských mužov mení minimálne. V ostatných prípadoch parameter β_x nadobúda takmer vyrovnané hodnoty, preto normálna dĺžka života sa predlžuje, ale aj tu je predigovaná normálna dĺžka života väčšia v Česku ako na Slovensku.

Záver

V populáciách s nízkou úmrtnosťou dochádza k predlžovaniu strednej dĺžky života spravidla paralelne s predlžovaním normálnej dĺžky života (Horiuchi et al. 2013). V populáciách so strednou úmrtnosťou sa môže vyskytnúť istá anomália, keď stredná dĺžka života sa predlžuje a normálna skracuje, a to vďaka znižovaniu úmrtnosti na odvrátiteľné príčiny, ako napr. Ukrajina a Slovensko (Langhamrová et al. 2014). Lee-Carterov model umožňuje pochopiť, akým spôsobom sa to deje, a robiť aj predikcie.

Prezentovaná metóda predikcie normálnej dĺžky života sa určite dá vo viacerých bodoch zlepšiť, preto dosiahnuté numerické výsledky treba brať s istou rezervou. K zvýšeniu presnosti by prispela aj kvalitnejšia údajová základňa. Na druhej strane, metóda založená na LCM otvára cestu, ako dospieť k presnejšiemu obrazu o budúcom vývoji ľudskej úmrtnosti. To je aj výzva pokračovať v skúmaní.

Poďakovanie

Výskum bol realizovaný v rámci projektu VEGA 2/0047/15.

Literatúra

1. Arlt, J., Arltová, M. 2003. *Finanční časové řady. Vlastnosti, metody modelování, příklady a aplikace*. Grada, Praha.
2. Canudas-Romo, V. 2008. The modal age at death and the shifting mortality hypothesis. *Demographic Research Vol. 19*, Art. 30, pp. 1179-1204.
3. Haberman, S., Russolillo, M. 2005. Lee Carter Mortality Forecasting: Application to the Italian Population. *Actuarial Research Paper* No. 167, Cass Business School, London. Dostupné na https://www.cass.city.ac.uk/__data/assets/pdf_file/0005/37157/167ARP.pdf
4. Horiuchi, S., Ouellette, N., Cheung, S.L.K., Robine, J-M. 2013. Modal age at death : lifespan indicator in the era of longevity extension. In: *Vienna Yearbook of Population Research 2013*, vol. 11, pp. 37-69.
5. Kodada P. 2007. *Mortality projection of Slovak population using Lee-Carter Model.* Report. Allianz Slovenská poisťovňa, Personal Insurance Department.
6. Langhamrová, J., Cséfalvaiová, K., Langhamrová, J. 2014. Life Expectancy and Modal Age at Death in Selected European Countries in the Years 1950-2012. In: *SMTDA 2014* Stochastic Modeling Techniques and Data Analysis International Conference and Demographics Workshop. Lisabon, 11.06.2014 – 14.06.2014. Lisabon : University, 2014, s. 387–397.
7. Lee, R. D., Carter, L. R. 1992. Modeling and Forecasting U.S. Mortality. *Journal of the American Statistical Association,* Vol. 87, No. 419 (Sep.,1992), 659-671.
8. Mészáros, J. 2000. *Výpočet úmrtnostných tabuliek. Výpočet stratených rokov života úmrtím.* Metodický materiál. Infostat, Výskumné demografické centrum, Bratislava.
9. POPIN Czech republic 2003. 15.8.2015. http://popin.natur.cuni.cz/html2/index.php?item=3.7
10. VDC 2015. Slovenská POPIN stránka. 15.8.2015.
11. http://www.infostat.sk/vdc/sk/index.php?option=com_wrapper&view=wrapper&Itemid=38
12. Vlk, V. 2015: *Parametrizácia a prognózovanie mier úmrtnosti*. Diplomová práca. FMFI UK Bratislava.

Kontact

Vladimír Vlk
KAMŠ FMFI UK Bratislava
vladimirvlk1@gmail.com

Karol Pastor
KAMŠ FMFI UK Bratislava
Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava, Slovakia
pastor@fmph.uniba.sk